

РЕЗЮМЕТА НА ПУБЛИКАЦИИТЕ ЗА УЧАСТИЕ В КОНКУРС ЗА ДОЦЕНТ

в Института по Математика и Информатика при БАН, София,
обявен в Държавен Вестник, Брой 65 от 2 август 2024 г.

Валдемар Василев Цанов

- (1) V.V. Tsanov, *Triangle groups, automorphic forms, and torus knots*,
L'Enseignement Mathématique (2) 59 (2013), 73-113. ISSN 0013-8584, DOI:10.4171/LEM/59-1-3.

Резюме: Статията изследва връзките между три класически и широко изучавани обекта: триъгълни фуксови групи, \mathbb{C}^\times -еквивариантни особености на равнинни криви, допълнения на торични възли в тримерната сфера. Прототипният пример засяга модулърната група $PSL_2(\mathbb{Z})$: факторът на допирателното разслоение върху горната полуравнина на Пуанкаре, с извадено нулево сечение, под Мьобиусовото действие на $PSL_2(\mathbb{Z})$ е бихоломорфен на допълнението на кривата $z^3 - 27w^2 = 0$ в \mathbb{C}^2 . Това може да се изведе от факта, че алгебрата от модулърни форми е породена от два елемента, често означавани с g_2, g_3 , и къспидалната форма $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ не се анулира в горната полуравнина. Като следствие, се получава дифеоморфизъм между $PSL_2(\mathbb{R})/PSL_2(\mathbb{Z})$ и допълнението на възел "детелина" - локалният възел на особената крива. В статията, тази конструкция е обобщена до всички (p, q, ∞) -триъгълни групи и, респективно, равнинни криви от вида $z^q + w^p = 0$, и (p, q) -торични възли, където p, q са взаимно прости положителни числа. Общия случай изисква употребата на автоморфни форми върху едносвързаната група $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$, и действието се пропуска през линейната група $SL_2(\mathbb{R})$ единствено в случая споменат по-горе. Доказателството използва идеи на Милнор и Долгачев въведени от тях при изучаване спектрите на алгебрите от автоморфни форми върху ко-компактни триъгълни групи (и по-обща равномерни решетки). Оказва се, че, с необходимите модификации, тази техника дава резултат и в къспидалния случай.

Abstract: This article is concerned with the relation between several classical and well-known objects: triangle Fuchsian groups, \mathbb{C}^\times -equivariant singularities of plane curves, torus knot complements in the 3-sphere. The prototypical example is the modular group $PSL_2(\mathbb{Z})$: the quotient by $PSL_2(\mathbb{Z})$ of the tangent bundle on the upper half-plane with removed zero-section is biholomorphic to the complement of the plane curve $z^3 - 27w^2 = 0$. This can be shown using the fact that the algebra of modular forms is doubly generated, by g_2, g_3 , and the cusp form $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ does not vanish on the half-plane. As a byproduct, one finds a diffeomorphism between $PSL_2(\mathbb{R})/PSL_2(\mathbb{Z})$ and the complement of the trefoil knot - the local knot of the singular curve. This construction is generalized to include all (p, q, ∞) -triangle groups and, respectively, curves of the form $z^q + w^p = 0$ and (p, q) -torus knots, for p, q co-prime. The general case requires the use of automorphic forms on the simply connected group $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$, and the action does descend to the linear group $SL_2(\mathbb{R})$ only in the aforementioned classical case. The proof uses ideas of Milnor and Dolgachev, which they introduced in their studies of the spectra of the algebras of automorphic forms of cocompact triangle groups (and, more generally, uniform lattices); it turns out that the same approach, with some modifications, allows to handle the cuspidal case.

- (2) A. Sawicki, V.V. Tsanov, *A link between quantum entanglement, secant varieties and sphericity*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **46** (2013), 265301, 20 pages. ISSN 17518121, DOI:10.1088/1751-8113/46/26/265301.

Резюме: В статията се изследват връзки между три понятия от теорията на представянията, алгебричната геометрия и теорията на квантовата информация. Първо - сферични действия на редуктивни групи върху проективно пространство; второ - секантни многообразия към

хомогенни проективни многообразия, и понятията ранг и граничен ранг на тензор; трето - квантово преплитане. Основното наблюдение засяга, от една страна, задачата за разпознаване на квантово състояние по неговите редуцирани едно-частични плътностни матрици, и от друга страна, тензорния ранг, т.е. минималния брой кохерентни състояния (разложими тензори) в израз на състоянието като суперпозиция (сума). За три случая важни за теорията на квантовото преплитане: системи от различни частици, бозони и фермиони, доказваме, че сферичността на действието е еквивалентна на това, тензори от даден ранг да не се апроксимират с тензори от по-нисък ранг. В общия случай, наричаме *изключителни* състоянията, които се апроксимират със състояния от по-нисък ранг. Такива съществуват тогава и само тогава когато в системата има поне три частици. В такъв случай почазваме, че състояния от тип W и някои техни модификации са изключителни и принадлежат на второто секантно многообразие. Съществуването на изключителни състояния представлява обструкция за това локалната унитарна еквивалентност на състояния да може да бъде остановена еднозначно от едно-частичните редуцирани плътностни матрици. Приведени са примери за системи от различни частици с известно описание на орбитите, където е дадено пълно описание на изключителните състояния, както и възможни интерпретации в термини на квантово преплитане.

Abstract: In this paper, we shed light on relations between three concepts studied in representations theory, algebraic geometry and quantum information theory. First - spherical actions of reductive groups on projective spaces. Second - secant varieties of homogeneous projective varieties, and the related notions of rank and border rank. Third - quantum entanglement. Our main result concerns the relation between the problem of the state reconstruction from its reduced one-particle density matrices and the minimal number of separable summands in its decomposition. More precisely, we show that sphericity implies that states of a given rank cannot be approximated by states of a lower rank. We call states for which such approximation is possible *exceptional states*. For three, important from quantum entanglement perspective cases of distinguishable, fermionic and bosonic particles, we also show that non-sphericity implies the existence of exceptional states. Remarkably, the exceptional states belong to non-bipartite entanglement classes. In particular, we show that the W -type states and their appropriate modifications are exceptional states stemming from the second secant variety for three cases above. We point out that the existence of the exceptional states is a physical obstruction for deciding the local unitary equivalence of states by means of the one-particle reduced density matrices. Finally, for a number of systems of distinguishable particles with known orbit structure we list all exceptional states and discuss their possible importance in entanglement theory.

- (3) A.V. Petukhov, V.V. Tsanov, *Homogeneous projective varieties with semi-continuous rank function*, Manuscripta Mathematica **147** (2015), 269–303. ISSN 00252611, DOI:10.1007/s00229-014-0723-5.

Резюме: Нека $X \subset \mathbb{P}(V)$ е проективно многообразие, което не се съдържа в хиперравнина. Тогава всеки вектор v във V може да бъде изразен като сума на вектори от афинния конус над X . Минималния брой такива събираеми са нарича X -ранг на v . В статията се класифицират всички еквивариантно вложени хомогенни проективни многообразия $X \subset \mathbb{P}(V)$ над алгебрически затворено поле с характеристика 0, чиято X -ранг функция е полунепрекъсната отдолу. Класически примери са: многообразието от матрици с ранг 1 (т.е. влагане на Сегре на произведение на две проективни пространства) и многообразието от квадратични форми с ранг 1 (квадратично влагане на Веронезе на проективно пространство), където понятието X -ранг съвпада с класическия ранг. В общия случай, X е проективната орбитата на старши вектор в неприводимо представяне на свързана полупроста линейна алгебрична група. Основният резултат е списък на всички неприводими представяния на полупрости групи, за които функцията X -ранг е полунепрекъсната отдолу.

Abstract: Let $X \subset \mathbb{P}(V)$ be a projective variety, which is not contained in a hyperplane. Then every vector v in V may be written as a sum of vectors from the affine cone over X . The minimal number of summands in such a sum is called the X -rank of v . In this paper, we classify all equivariantly embedded homogeneous projective varieties $X \subset \mathbb{P}(V)$ whose X -rank function is

lower semi-continuous. Classical examples are: the variety of rank one matrices (Segre variety with two factors) and the variety of rank one quadratic forms (quadratic Veronese variety). In the general setting, X is the orbit in $\mathbb{P}(V)$ of a highest weight line in an irreducible representation V of a connected reductive linear algebraic group G . Thus, our result is a list of all irreducible representations of reductive groups, for which the corresponding rank function is lower semi-continuous.

- (4) T. Maciążek, V.V. Tsanov, *Quantum marginals from pure doubly excited states*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **50** (2017) 465-504. ISSN 1751-8121, DOI 10.1088/1751-8121/aa8c5f.

Резюме: Спектрите на едно-частичните плътностни матрици, получени от чистите състояния на дадена многочастична квантова система от крайна размерност, образуват изпъкнал политоп, известен още като моментов политоп. В статията се конструират политопи съдържащи и, съответно, съдържащи се в моментовия политоп, т.е. вътрешно и външно ограничение. Външния политоп е равен на моментовия политоп за случаи в общо положение, т.е. ограничението е точно. Вътрешното ограничение е конструирано от двукратно възбудени състояния, т.е. действия на композиции на двойки пораждащи оператори върху начално кохерентно състояние (вакуум). Класифицирани са всички квантови системи, за които външния и вътрешния политоп съвпадат, и дават израз за моментовия политоп. Доказваме, че тези системи са: i) системи от две частици, iii) системи от произволен брой q -бита, iii) три фермиона на $N \leq 7$ нива, iv) произволна система от бозони, v) фермионно пространство на Фок на $N \leq 5$ нива. Използват се методи от симплектичната геометрия и теорията на представяния на компактни групи на Ли. В частност се изследват образите на собствени изображения на момента. Описани са моментовите образи на неприводими проективни представяния където действието е сферично.

Abstract: The possible spectra of one-particle reduced density matrices that are compatible with a pure multipartite quantum system of finite dimension form a convex polytope. We introduce a new construction of inner- and outer-bounding polytopes that constrain the polytope for the entire quantum system. The outer bound is sharp. The inner polytope stems only from doubly excited states. We find all quantum systems, where the bounds coincide giving the entire polytope. We show, that those systems are: i) any system of two particles, ii) L qubits, iii) three fermions on $N \leq 7$ levels, iv) any number of bosons on any number of levels and v) fermionic Fock space on $N \leq 5$ levels. The methods we use come from symplectic geometry and representation theory of compact Lie groups. In particular, we study the images of proper momentum maps, where our method describes momentum images for all representations that are spherical.

- (5) V.V. Tsanov, *Secant varieties and degrees of invariants*, Journal of Geometry and Symmetry in Physics **51** (2019), 73–85. ISSN 13125192, DOI:10.7546/jgsp-51-2019-73-85.

Резюме: Пръстенът от инвариантни полиноми $\mathbb{C}[V]^G$ върху дадено крайномерен модул над свързана, комплексна, редуктивна група на Ли G е крайно породен, според известна теорема на Хилберт. Доказателството е неконструктивно, и пораждащи множества и степените на техните елементи са обект на нестихващ интерес. В статията са изведени определени делители на степени на елементи от минимални пораждащи множества. За неприводими модули е изведена долна граница за степените на неконстантни хомогенни инвариантни полиноми, която долна граница се определя от геометрични свойства на единствената затворена проективна орбита X на групата G , и по-специално, на секантните многообразия $\Sigma_r(X)$ към тази орбита. За един специален клас от модули, където секантните многообразия имат проста структура, е намерено точно съответствие на между секантните многообразия пресичащи полустабилния локус и елементите на минимално пораждащо множество от инварианти.

Abstract: The ring of invariant polynomials $\mathbb{C}[V]^G$ over a given finite dimensional representation space V of a connected complex reductive linear algebraic group G is known, by a famous theorem of Hilbert, to be finitely generated. The general proof being nonconstructive, generating

sets and the degrees of their elements have remained a subject of interest. In this article we determine certain divisors of the degrees of the generators. Also, for irreducible representations, we provide lower bounds for the degrees, determined by the geometric properties of the unique closed projective G -orbit X , and more specifically its secant varieties. For a particular class of representations, where the secant varieties are especially well behaved, we exhibit an exact correspondence between the generating invariants and the secant varieties intersecting the semistable locus.

- (6) H. Seppänen, V.V. Tsanov, *Geometric invariant theory for principal three-dimensional subgroups acting on flag varieties*, In: Representation theory - current trends and perspectives, ed. H. Krause et al, Series of Congress Reports, EMS 2017, pp. 637-663. ISBN 978-3-03719-171-2, DOI:10.4171/171.

Резюме: Нека G е свързана, полупроста, комплексна група на Ли, и $B \subset G$ е максимална разрешима подгрупа. В статията се изучава Геометрична Теория на Инвариантите (GIT) върху флаговото многообразие G/B относно действието на главна, тримерна, проста подгрупа $S \subset G$. В явен вид са определени GIT-класовете на еквивалентност от S -обилни линейни разслоения върху G/B . Доказано е, че тези класове включват GIT-камери и S -подвижни камери, в смисъла на Долгачев и Ху, при слаба хипотеза изключваща явно описани случаи в ниски размерности. Многообразиата получени като GIT-фактори по отношение на камери образуват семейство от мечтани пространства на Мори, което е канонично определено за групата G . Описани са три важни конуса в Пикаровата група на GIT-фактори по отношение на S -подвижни камери: псевдо-ефективния, числово-ефективния и подвижния конуси.

Abstract: Let G be a semisimple complex Lie group and $B \subset G$ a maximal solvable subgroup. In this article, we study Geometric Invariant Theory on a flag variety G/B with respect to the action of a principal 3-dimensional simple subgroup $S \subset G$. We determine explicitly the GIT-equivalence classes of S -ample line bundles on G/B . We show that, under mild assumptions, among the GIT-classes there are chambers and S -movable chambers, in the sense of Dolgachev-Hu. The GIT-quotients with respect to various chambers form a family of Mori dream spaces, canonically associated with G . We are able to determine the three important cones in the Picard group of any of these quotients: the pseudoeffective-, the movable-, and the nef cones.

- (7) H. Seppänen, V.V. Tsanov, *Unstable loci in flag varieties and variations of quotients*, International Mathematics Research Notices **2022**, Issue 8, (2022), 5882–5934. Published online on 19.10.2020. ISSN 1073-7928, DOI: 10.1093/imrn/rnaa268.

Резюме: В контекста на Геометрична Теория на Инвариантите (GIT) се разглежда действието на произволна, свързана, полупроста, комплексна подгрупа \hat{G} на едносвързана, полупроста, комплексна група на Ли G върху флаговото многообразие $X = G/B$, където B е Борелева подгрупа на G , и линеаризации на това действие чрез хомогенни линейни разслоения \mathcal{L} върху X . Изведена е явна затворена формула за подмногообразието от нестабилни точки, в зависимост от \mathcal{L} , както и формула за (ко)размерността на това многообразие. Доказано е, че коразмерността е равна на 1, ако \mathcal{L} лежи върху регулярната граница на \hat{G} -обилния конус в $\text{Pic}(X)_{\mathbb{R}}$, и расте със стъпки от 1, когато \mathcal{L} варира от границата към вътрешността на конуса. Доказано е, че линейните разслоения, чието нестабилното подмногообразие има коразмерност поне q , образуват рационален, полиедрален, изпъкнал конус. Дадени са характеризацията и рекурсивен алгоритъм за явно описание на всички GIT-класове на еквивалентност в \hat{G} -обилния конус (определени с равенство на нестабилното подмногообразие).

Като приложение са изведени критерии за съществуване на \hat{G} -подвижни камери - GIT-класове даващи геометричен GIT-фактор и имащи нестабилно подмногообразие с коразмерност поне 2. GIT-факторите по отношение на \hat{G} -подвижни камери съдържат глобална информация за \hat{G} -инвариантните подпространства в неприводими G -модули. Всеки такъв фактор Y е мечтано пространство на Мори, и камерите на Мори в неговия псевдо-ефективен конус съответстват на GIT-камерите в \hat{G} -обилния конус на X . Нещо повече, всяка рационална контракция $f : Y \dashrightarrow Y'$ към нормално проективно многообразие Y' е индуцирана от GIT

чрез линеаризация на действието на \hat{G} върху X . Като конкретен пример е доказано, че \hat{G} -подвижни камери съществуват за диагонална подгрупа в декартова степен $\hat{G} \hookrightarrow (\hat{G})^k = G$ при достатъчно големи k .

Abstract: We consider the action of a semisimple subgroup \hat{G} of a semisimple complex group G on the flag variety $X = G/B$, and the linearizations of this action by line bundles \mathcal{L} on X . We give an explicit description of the associated *unstable locus* in dependence of \mathcal{L} , as well as a formula for its (co)dimension. We observe that the codimension is equal to 1 on the regular boundary of the \hat{G} -ample cone, and grows towards the interior in steps by 1, in a way that the line bundles with unstable locus of codimension at least q form a convex polyhedral cone. We also give a description and a recursive algorithm for determining all GIT-classes in the \hat{G} -ample cone of X .

As an application, we give conditions ensuring the existence of GIT-classes C with an unstable locus of codimension at least two and which moreover yield geometric GIT-quotients. Such quotients Y_C reflect global information on \hat{G} -invariants. They are always Mori dream spaces, and the Mori chambers of the pseudoeffective cone $\overline{\text{Eff}}(Y_C)$ correspond to the GIT-chambers of the \hat{G} -ample cone of X . Moreover, all rational contractions $f : Y_C \dashrightarrow Y'$ to normal projective varieties Y' are induced by GIT from linearizations of the action of \hat{G} on X . In particular, this is shown to hold for a diagonal embedding $\hat{G} \hookrightarrow (\hat{G})^k$, with sufficiently large k .

- (8) I.B. Penkov, V.V. Tsanov, *Representations of large Mackey Lie algebras and universal tensor categories*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, 2024, <https://doi.org/10.1007/s12188-024-00280-6>, ISSN 0025-5858.

Резюме: В статията е конструирана универсална абелева тензорна категория \mathbf{T}_t породена от два елемента X, Y с дадени крайни филтрации $0 \subsetneq X_0 \subsetneq \dots \subsetneq X_{t+1} = X$ and $0 \subsetneq Y_0 \subsetneq \dots \subsetneq Y_{t+1} = Y$, и свояване $X \otimes Y \rightarrow \mathbf{1}$, където $\mathbf{1}$ е моноидалната единица. Модел за такава категория е получен във вида на категория от преставяния на Маки-Ли алгебра $\mathfrak{gl}^M(V, V_*)$ с кардиналност 2^{\aleph_t} , асоциирана с диагонализируемо свояване между две векторни пространства V, V_* с размерност \aleph_t върху алгебрически затворено поле \mathbb{K} с характеристика 0. Като подготвителна стъпка, е дефинирана и изследвана тензорна категория \mathbb{T}_t породена от алгебричните дуални пространства V^* и $(V_*)^*$. Инективната обвивка I на тривиалния модул \mathbb{K} в \mathbb{T}_t носи структура на безкрайномерна комутативна алгебра, и категорията \mathbf{T}_t има за обекти всички свободни I -модули в \mathbb{T}_t . Общата схема е взимствана от предходна работа за $t = 0$. Съществен нов резултат, дори в случая $t = 0$, е явно описание на Ext-групите между прости обекти във всяка от категориите \mathbf{T}_t и \mathbb{T}_t . Доказано е, че тези Ext-групи имат крайни размерности, за които е са дадени затворени комбинаторни формули. Това задава връзка между универсалните категории и комбинаторика на числата на Лтълууд-Ричардсон.

Резюме:

Abstract: We extend previous work by constructing a universal abelian tensor category \mathbf{T}_t generated by two objects X, Y equipped with finite filtrations $0 \subsetneq X_0 \subsetneq \dots \subsetneq X_{t+1} = X$ and $0 \subsetneq Y_0 \subsetneq \dots \subsetneq Y_{t+1} = Y$, and with a pairing $X \otimes Y \rightarrow \mathbf{1}$, where $\mathbf{1}$ is the monoidal unit. This category is modeled as a category of representations of a Mackey Lie algebra $\mathfrak{gl}^M(V, V_*)$ of cardinality 2^{\aleph_t} , associated to a diagonalizable pairing between two vector spaces V, V_* of dimension \aleph_t over an algebraically closed field \mathbb{K} of characteristic 0. As a preliminary step, we study a tensor category \mathbb{T}_t generated by the algebraic duals V^* and $(V_*)^*$. The injective hull of the trivial module \mathbb{K} in \mathbb{T}_t is a commutative algebra I , and the category \mathbf{T}_t consists of all free I -modules in \mathbb{T}_t . An essential novelty in our work is the explicit computation of Ext-spaces between simples in both categories \mathbf{T}_t and \mathbb{T}_t , which had been an open problem already for $t = 0$. This provides a direct link from the theory of universal tensor categories to Littlewood-Richardson-type combinatorics.

- (9) V.V. Tsanov, *Partial convex hulls of coadjoint orbits and degrees of invariants*, Proceeding of XV International workshop “Lie theory and its applications in physics”, ed. Vl. Dobrev, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, to appear.

Резюме: Изучават се свойства на изпъкналите обвивки на (ко)присъединени орбити на компактни групи на Ли, с приложения в теорията на инвариантите и разлагането на тензорни произведения на модули. Въведено е понятието частична изпъкнала обвивка, и от него са извлечени два числови инварианта на коприсъединена орбита на полупроста компактна група на Ли K . Доказано е, че орбитите, за които един от тези два инварианта не надвишава дадено $r \in \mathbb{N}$, образуват, след пресичане с фиксирана камера на Вайл, рационален полиедрален изпъкнал конус. Този конус е тясно свързан с конуса на Литълвуд-Ричардсон описващ разлаганията на тензорни произведения на $r - 1$ неприводими K -модула. Доказано е, че въпросните числови инварианти задават долни граници за степени на K -инвариантни полиноми върху неприводими представяния.

Abstract: The subject of study are properties of convex hulls of (co)adjoint orbits of connected compact Lie groups, with applications to invariant theory and tensor product decompositions. The notion of partial convex hulls is introduced and applied to define two numerical invariants of a coadjoint orbit of a semisimple connected compact Lie group K . It is shown that the orbits, where any one of these invariants does not exceed a given number r , form, upon intersection with a fixed Weyl chamber, a rational convex polyhedral cone in that chamber, related to the Littlewood-Richardson cone of the r -fold diagonal embedding of K . The numerical invariants are shown to provide lower bounds for degrees of invariant polynomials on irreducible unitary representations.